SOCIAL SCIENCES STUDIES JOURNAL
SSSjournal (ISSN:2587-1587)

Economics and Administration, Tourism and Tourism Management, History, Culture, Religion, Psychology, Sociology, Fine Arts, Engineering, Architecture, Language, Literature, Educational Sciences, Pedagogy & Other Disciplines in Social Sciences

Vol:4, Issue:14 *sssjournal.com*	pp.664-672 ISSN:2587-1587	2018 sssjournal.info@gmail.com

Article Arrival Date (Makale Geliş Tarihi) 20/01/2018 | The Published Rel. Date (Makale Yayın Kabul Tarihi) 26/02/2018
Published Date (Makale Yayın Tarihi) 26.02.2018

OLASILIK İNTEGRALİ VE UYGULAMALARI

PROBABILITY INTEGRAL AND APPLICATIONS

Yrd.Doç.Dr. Samim DÜNDAR

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Bölümü, Mekanik Anabilim Dalı
samim.dundar@ege.edu.tr, İzmir, Türkiye

ÖZ

Olasılık integrali, integral ile tanımlanan fonksiyon anlamındadır. Argümanının reel değerler olması durumunda, reel ve monoton artan bir fonksiyondur. Olasılık integrali ile matematiksel istatistik, ısı iletimi teorisi ve matematiksel fiziğin çeşitli dalları gibi uygulamalı matematiğin birçok dalında karşılaşılır. θ(x) ile gösterilen olasılık integralinde, x değişkeni reel ya da kompleks olabilir. Bu çalışmada x değişkeni reel değişken olarak kullanılmıştır. Olasılık integrali ve hata fonksiyonu birbiriyle ilişkisi olan fonksiyonlardır. Söz konusu ilişki çalışmanın ikinci kısımda açıklanmıştır. Yine çalışmanın ikinci kısımda normal dağılım ve olasılık integrali kullanılarak olası hata değerinin yaklaşık olarak nasıl hesaplandığı gösterilmiştir. Çalışmanın üçüncü kısmında da Laplace dönüşümü açıklanmıştır. Çalışmanın dördüncü kısmında başlangıç sıcaklığının sıfır olduğu kabul edilerek, x-ekseni boyunca sonsuza uzanan yarı sonsuz yalıtımlı bir çubuk için ısı iletim denkleminin çözümü Laplace dönüşümü kullanılarak yapılmış ve çözüm fonksiyonu, olasılık integralinin tümleyeni formunda elde edilmiştir. Son olarak, dördüncü kısımda elde edilen çözüm fonksiyonundan yararlanılarak sıcaklık dağılımını veren bir olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılık integrali, Normal dağılım, Hata fonksiyonu, Laplace dönüşümü.

ABSTRACT

The probability integral is meant the function defined by the integral. For real values its argument, it is a real monotonically increasing function. The probability integral is encountered in many branches of applied mathematics, e.g, mathematical statistic, the theory of heat conduction and various branches of mathematical physics. In the probability integral represented by θ(x), the x variable can be real or complex. In this work, x variables are used as real variable. The probability integral and the error function are related functions to each other. The relationship is explained in second part. Also in the second part, it is explained that, using the normal distribution and probability integral than how the probable error value is approximately calculation is shown. In the third part of the work, Laplace transformation is explained. In the fifth part of the work, assuming that the initial temperature is zero and for a semi-infinitely insulated rod that extends infinitely along the x-axis, the solution of the heat transfer equation is made by using Laplace transform, and the solution function is obtained in the form of a complement of the probability integral. Finally, by using the solution function obtained in the fourth part, a probability density function which gives the temperature distribution is obtained.

Keywords: The probability integral, Normal distribution, Error function, Laplace transform

1. GİRİŞ

Olasılık integrali, uygulamalı matematikte sıklıkla karşılaşılan özel bir fonksiyondur (Lebedev, 1972). Olasılık integraline ısı iletimi ve fiziğin çeşitli dallarında karşılaşıldığı gibi istatistikte de önemli bir yer tutar. Bu çalışmada $\theta(x)$ ile gösterdiğimiz olasılık integralinde, x değişkeni reel ya da kompleks olabilir. x değişkenin kompleks olması durumunda, elektromanyetik dalga teorisinde de olasılık integralinden ortaya çıkan kompleks değişkenli fonksiyonlar kullanılmaktadır. Olasılık integrali, hata fonksiyonu ile ilişkilidir (Lebedev, 1972; Kreyzsig, 2011).

Çalışmanın birinci kısmında olasılık integralinin tanımı, temel özellikleri, hata fonksiyonu ile ilişkisi, ikinci kısmında da istatistikte önemli bir sürekli dağılım olan normal dağılım ile ilişkisinden kısaca bahsedilmiştir. Olasılık integrali günümüzde de bir çok araştırma makalesinde kullanılmaktadır. Örneğin, Alekseevna, T.Y., Vladimirovna, N.S., Rifgatovich, S.A. (2017), "*Calculation of the probability integral indicator of the level of air pollution*" isimli çalışmasında sinir ağlarını ve olasılık integralini kullanılarak hava kirliliği seviyesini hesaplamıştır.

Dördüncü kısımda, belirli koşullar altında ısı iletimi denkleminin çözümünün, Laplace dönüşümü kullanılarak yapılması amaçlandığı için üçüncü kısımda Laplace dönüşümünün tanımı, kısmi türevlerin dönüşümlerinin ve convolution teoreminin ispatları yapılmıştır. Laplace dönüşümü, bir çok araştırma makalesinde kullanılmaktadır. Li, S. & Cao,B. Laplace dönüşümünü kullandığı, "*Generalized variational principles for heat conduction models based on Laplace transforms*" isimli çalışmasında, parabolik ve hiperbolik ısı iletim modellerini diğer sınır koşulları türlerine genişletmiştir. Meilanov, R.P., Shabanova, M.R.& Akhmedov, E.N. "*Some peculiarities of the solution of the heat conduction equation in fractional calculus*" isimli çalışmasında kesirli mertebeli ısı iletimi denkleminin çözümü ile zaman ve koordinatlara göre sıcaklık dağılımının oranlara bağımlılığı incelenmiştir.

2.YÖNTEM

Çok iyi yalıtılmış, metal bir çubuğun ya da telin, uç noktalarında sıfır sıcaklıkta tutulduğu sınır koşulları ile başlangıç sıcaklığının bilindiği durumda ısı iletimi denkleminin çözümü, Fourier serilerinin kullanıldığı değişkenlerine ayırma metodu ile yapılmaktadır (Kreyzsig, 2011; Alekseevna; Vladimirovna & Rifgatovich, 2017). Çubuğun her iki taraftan sonsuz uzunluğa sahip olması halinde Fourier serilerinin rolünü, Fourier integralleri yüklenir (Kreyzsig, 2011). Bu durumda sınır koşullarına sahip değiliz, sadece başlangıç koşulu vardır.

Her iki taraftan yalıtılmış, bir ucu sınırlı, diğer ucu sonsuza uzanan metal bir çubuğu ele aldığımızda, Laplace dönüşümünün tanım aralığı $[0, \infty)$ olduğundan problemin çözümü Laplace dönüşümü kullanımına uygun bir hale gelir. Bu nedenle belirtilen koşullar altında problemin çözümü Laplace dönüşümü ile yapılmış ve çözüm fonksiyonu, kısım.1'deki olasılık integralinin tümleyeni biçiminde elde edilmiştir. Ayrıca çözüm esnasında sıcaklığın (t'nin) dağılımını veren bir olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilmiş, elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu hakkında bilgi sonuç kısmında verilmiştir.

2.1 Olasılık İntegrali

$f(x) = exp\{-x^2\}$ çan biçiminde bir grafiğe sahip olan çift bir fonksiyondur. Çift bir fonksiyon olması nedeniyle grafiği $f(x)$ eksenine göre simetriktir. Bu fonksiyonun grafiği şekil 1.1'de görülmektedir. Matematikte bu fonksiyonun integrali ile sıklıkla karşılaşılır.

Tanım:

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \qquad (1.1)$$

integralinin tanımladığı fonksiyona olasılık integrali denir. Burada x reel ya da kompleks olabilir. x değişkeninin reel olması durumunda $\theta(x)$ reel ve monoton artan bir fonksiyondur. (Şekil 1.2) $\theta(0) = 0$ ve,

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (1.2)$$

olduğundan,

$$\lim_{x\to\infty} \theta(x) = 1 \qquad (1.3)$$

olduğu açıktır.

Eşitlik(1.2) ve Eşitlik(1.3)'den $\theta(x)$ fonksiyonunun tümleyeni,

$$\begin{aligned} 1 - \theta(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du \qquad (1.4) \end{aligned}$$

olur. Olasılık integrali ile hata fonksiyonu ilgilidir (Lebedev, 1972). Hata fonksiyonu,

$Erf(t) = \int_0^t e^{-u^2} du$

ve tümleyeni,

$Erfc(t) = \int_t^{\infty} e^{-u^2} du$

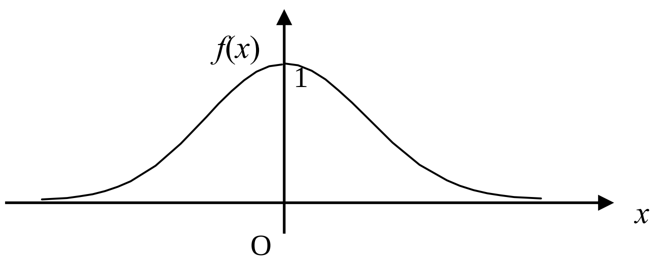
biçiminde tanımlıdır (Kreyzsig, 2011). Buradan olasılık integrali ile hata fonksiyonu arasında ilişki,

$Erf(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\theta(x)$

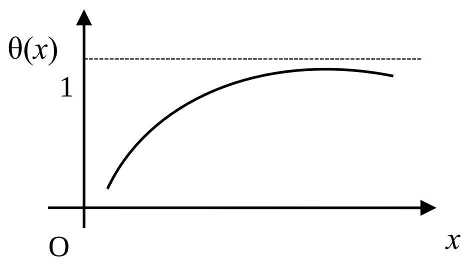
ve tümleyeni,

$Erfc(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[1 - \theta(x)]$

olur.



Şekil 1.1: $f(x) = exp\{-x^2\}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 1.2: $\theta(x)$ fonksiyonunun grafiği

Eşitlik(1.1)'deki $\theta(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulmak amacıyla, $\exp\{t\}$ fonksiyonunun Maclaurin serisinde *t* yerine $-u^2$ yazalım,

$$\exp\{-u^2\} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots \qquad (1.5)$$

Eşitlik(1.5) 'nin, 0 'dan *x*'e kadar integrali alınırsa,

$$\int_0^x e^{-u^2} du = x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \cdots$$

olur. Buradan $\theta(x)$ fonksiyonunun maclaurin serisi,

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!\,3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \cdots \right) \qquad (1.6)$$

elde edilir. *x*'nin küçük değerleri için, θ fonksiyonunun değerlerini hesaplamak istenirse eşitlik (1.6)'daki seriden yararlanabiliriz.

Örnek: $\theta(0,5)$ değerini üç ondalıklı doğru olacak biçimde hesaplamak istersek,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(0,5)^7}{3!\,7} = 0,0002$$

olduğundan, eşitlik (1.8)'deki seride ilk üç terimi almak yeterlidir.

$$\theta(0,5) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left((0,5) - \frac{(0,5)^3}{1!\,3} + \frac{(0,5)^5}{2!\,5} \right) = 0,520$$

bulunur. *X* 'in büyük değerleri söz konusu olursa, o zaman $\theta(x)$ fonksiyonunun asimtotik açılımını yapmak gerekir.

2.2 Normal Dağılım

Sürekli bir şans değişkeninin, [*x*,*x*+*dx*] aralığında bulunması olasılığı,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \qquad (2.1)$$

ifadesi ile verilmiş ise, bu şans değişkenine μ ve σ parametreli normal dağılıma sahiptir denir. μ ve σ parametreleri sırasıyla normal dağılımın konum ve yayılım parametreleridir (Stuart & Ord, 1987; Miller & Miller 1999; Montgomery & Runger,2014). $X-\mu$‘nin $[a,b]$ aralığında olması olasılığını bulmak istersek,

$$Pr\{a \leq X-\mu \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{a+\mu}^{b+\mu} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}dx \tag{2.2}$$

integralini hesaplamak gerekir. Eşitlik (2.2) ‘deki integralde,

$$\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t,\ \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma} = dt$$

değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a/\sqrt{2}\sigma}^{b/\sqrt{2}\sigma} exp\{-t^2\}dt = \frac{1}{2}\left\{\theta\left(\frac{b}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \theta\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right\} \tag{2.3}$$

elde edilir. Eşitlik(2.3)‘deki $\theta(x)$ olasılık integralidir. Eğer eşitlik (2.2)‘de $a \to -\infty$, $b \to \infty$ alınırsa olasılığın 1 olacağı açıktır. Eğer eşitlik (2.2)‘de $a=-\delta, b=\delta$ alınırsa, bu durumda $X-\mu$‘nin $[-\delta,\delta]$ aralığında olması olasılığı,

$$Pr\{|X-\mu| \leq \delta\} = \theta\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{2.4}$$

ve $X-\mu$ ‘nin $[-\delta,\delta]$ aralığının dışında olması olasılığı,

$$Pr\{|X-\mu| > \delta\} = 1-\theta\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{2.5}$$

dır. Eşitlik(2.4) ve eşitlik (2.5)’deki $\delta=\delta_p$ değeri, olası hata olarak bilinir. Şimdi, acaba δ_p‘nin hangi değeri için aşağıdaki denklem sağlanır?

$$\theta\left(\frac{\delta_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} \tag{2.6}$$

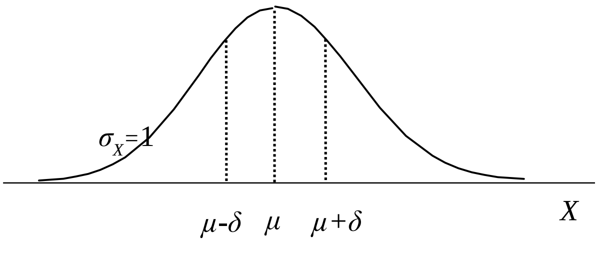
Eşitlik (2.4) ve (2.6) ‘dan,

$$\theta\left(\frac{\delta_p}{\sqrt{2}\sigma}\right) = Pr\{\mu-\delta \leq X \leq \mu+\delta\} = \frac{1}{2}$$

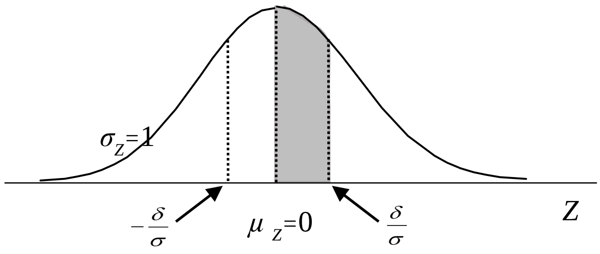
yazabiliriz. Şimdi normal dağılımdan, standart normal dağılıma geçelim,

$$z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = -\frac{\delta}{\sigma},\ z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\delta}{\sigma}$$

olduğundan şekil 2.2‘de $-\delta/\sigma$ ile δ/σ arasındaki bölgenin alanı 0,5 olduğundan, gölgeli bölgenin alanı 0,25 olmalıdır.



Şekil 2.1: Normal dağılım.



Şekil 2.2: Standart normal dağılım.

Standart normal dağılım tablosundan (Miller & Miller 1999) 0,674 karşılık gelen sayı 0,25 olduğundan, eşitlik (2.6)‘daki $\delta_p = 0{,}674\sigma$ olur. Yani olası hata değeri 0,674 dir.

3. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$t \geq 0$ için tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}dt \tag{3.1}$$

integrali ile tanımlıdır. Eşitlik (3.1)’deki integral improper olduğundan,

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(t)\, e^{-st}dt. \tag{3.2}$$

biçiminde yazılır. Sonlu olması halinde eşitlik (3.2)'deki limitin sonucuna, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ile gösterilir. Ek olarak, eşitlik (3.1)'deki $f(t)$ fonksiyonuna, $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ile gösterilir (Kreyzsig, 2011; Nagle, Saff, Snider, 2012).

3.1 Türevlerin Dönüşümü

$t > 0, a \leq x \leq b$ için tanımlı $y(x,t)$ fonksiyonu için (Kreyzsig, 2011),

$$a)\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right\} = sY(x,s) - y(x,0), \tag{3.3}$$

$$b)\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2}. \tag{3.4}$$

a)nın ispatı:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\, e^{-st}dt = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\, e^{-st}dt$$

son integralde kısımlara ayırma kullanılırsa,

$$u = e^{-st},\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}dt = dv,\ \ du = -se^{-st}dt$$

dönüşümü ile,

$$\lim_{M\to\infty}\left[y(x,t)e^{-st}\Big|_0^M + s\int_0^M e^{-st}y(x,t)\,dt\ \right] = -sy(x,0) + sY(x,s).$$

b)nin ispatı:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} e^{-st}dt = \frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^\infty y(x,t)\, e^{-st}dt\right) = \frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2}.$$

3.2 Convolution teoremi

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$, $g(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $G(s)$ ile gösterilirse,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t) \tag{3.5}$$

dir (Kreyzsig, 2011; Nagle, Saff, Snider, 2012).

İspat: Gösterilmesi gereken,

$$\mathcal{L}\,\{f(t) * g(t)\} = F(s)\,G(s)$$

dir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du\right\}\\ &= \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left(\int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du\right)dt\\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st}\ f(u)g(t-u)dudt\\ &= \lim_{M\to\infty}\int_{t=0}^M \int_{u=0}^t e^{-st}\ f(u)g(t-u)dudt.\end{aligned} \tag{3.6}$$

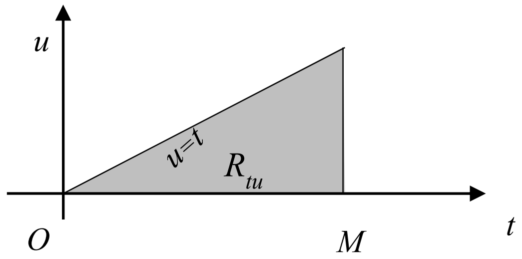
Eşitlik(3.6)'daki integralde $u + v = t$ dönüşümü yapılırsa, şekil 3.1'deki R_{tu} bölgesi şekil 3.2'deki R_{uv} bölgesine dönüşür. Bu durumda,

$$\iint_{R_{tu}} e^{-st}f(u)g(t-u)dudt = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)|\mathcal{J}|\,dudv.$$

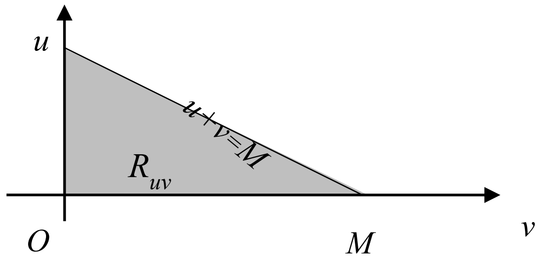
Dönüşümün jakobianı,

$$|\mathcal{J}| = \left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v}\\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1$$

olduğundan,



Şekil 3.1: R_{tu} bölgesi



Şekil 3.2: R_{uv} bölgesi

$$\iint_{R_{uv}} e^{-st} f(u)g(t-u)|J|\, dudv = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv$$

ve limite geçilirse,

$$\lim_{M\to\infty}\int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv = \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv$$

$$= \left(\int_{u=0}^{\infty} e^{-su} f(u)du\right)\left(\int_{v=0}^{\infty} e^{-sv} g(v)dv\right)$$

$$= F(s)\, G(s)$$

bulunur.

4. TEK BOYUTLU ISI DENKLEMİ

Isı akışını modelleyen temel kısmi türevli diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\nabla^2 u \tag{4.1}$$

ısı denklemidir[2,6]. Uzayda homojen materyalli bir cisimdeki $u(x,y,z,t)$ sıcaklığını verir. (4.1) denklemindeki $c^2 = k/\lambda\rho$ sabiti ısı dağılmasıdır. k cismin materyalinin ısı iletkenliği, λ özgül ısı ve ρ yoğunluğudur. Eşitlik (4.1)'deki,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{4.2}$$

olup, u fonksiyonunun Laplacian'ıdır. Isının sadece yatay eksen yönünde akması için ince uzun metal çubuk ya da telin; sabit, enine kesitli ve homojen materyalli, yatay eksen boyunca yönlendirilmiş ve yandan çok iyi yalıtılmış olduğunu kabul edelim. Bu durumda u zamana ve sadece x'e bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda eşitlik (4.2)'deki Laplacian,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

olacağından,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.3}$$

tek boyutlu ısı denklemi halini alır. Başlangıç sıcaklığı 0, her belirli $t \to 0$ için $x \to \infty$ iken $u(x,t) \geq 0$ ve $u(0,t) = f(t)$ kabul edelim. $x = 0$'dan yatay eksen boyunca sonsuza uzanan, yandan yalıtılmış bir çubuktaki $u(x,t)$ sıcaklığını bulmak istersek, (4.3)'deki denklemi,

$$u(0,t) = f(t), \tag{4.4}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{4.5}$$

sınır koşulları altında çözmemiz gerekir. Çözümü Laplace dönüşümü ile yapacağımız için önce, eşitlik (4.4) ve (4.5)'deki sınır koşullarının Laplace dönüşümlerini bulmalıyız.

$$\mathcal{L}\{u(0,t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{4.6}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0. \tag{4.7}$$

Şimdi (4.3)'deki denklemin Laplace dönüşümü alınırsa,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = c^2\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\}$$

$s\,U(x,s) - u(x,0) = \frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$

olur. Başlangıç sıcaklığı 0 olduğundan, $u(x,0) = 0$ dır.

$s\,U(x,s) = c^2\frac{d^2U(x,s)}{dx^2}$

$d/dx = D^2$ olmak üzere,

$$(c^2D^2 - s)U(x,s) = 0 \tag{4.8}$$

bulunur. (4.8)'denkleminin genel çözümü,

$$U(x,s) = A_1e^{\frac{\sqrt{s}}{c}x} + A_2e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \tag{4.9}$$

olup, (4.7)'deki sınır koşulunun sağlanabilmesi için, $A_1 = 0$ olmalıdır. Bu durumda,

$U(x,s) = A_2e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}$

olur. (4.6)'daki sınır koşulundan $A_2 = F(s)$ olur, yerine yazılırsa,

$$U(x,s) = F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \tag{4.10}$$

bulunur. Eşitlik(4.10)'dan ters dönüşüme geçilirse,

$$\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}\right\} \tag{4.11}$$

Eşitlik(4.11)'in birinci tarafının ters dönüşümü $u(x,t)$'yi verir. İkinci tarafının ters dönüşümü bulmak için convolution teoremini kullanırsak,

$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}\right\} = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}\right\}$

olduğundan,

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}\right\} \tag{4.12}$$

olur. Eşitlik(4.12)'nin ikinci tarafındaki, $exp\{-\sqrt{s}x/c\}$'nin ters dönüşümü bulmak amacıyla,

$Y(s) = exp\{-\sqrt{s}x/c\}$ alalım. $Y(s)$ fonksiyonunun, s'ye göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri,

$\frac{dY(s)}{ds} = -\frac{x}{2c\sqrt{s}}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x},$

$\frac{d^2Y(s)}{ds^2} = \frac{x^2}{4c^2s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} + \frac{x}{4cs^{3/2}}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x}$

olup, buradan,

$$4s\frac{d^2Y(s)}{ds^2} = \frac{x^2}{c^2}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} + \frac{x}{c\sqrt{s}}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \tag{4.13}$$

$$2\frac{dY(s)}{ds} = -\frac{x}{c\sqrt{s}}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \tag{4.14}$$

$$-\frac{x^2}{c^2}\,Y(s) = -\frac{x^2}{c^2}e^{-\frac{\sqrt{s}}{c}x} \tag{4.15}$$

olup, (4.13), (4.14), (4.15) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$4s\frac{d^2Y(s)}{ds^2} + 2\frac{dY(s)}{ds} - \frac{x^2}{c^2}Y(s) = 0$

diferansiyel denklemi elde edilir. $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ olmak üzere,

$4\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}[t^2y(t)]\right\} + 2\mathcal{L}\{-ty(t)\} - \frac{x^2}{c^2}\,\mathcal{L}\{y(t)\} = 0$

$$4\mathcal{L}\left\{2ty(t)+t^2\frac{dy(t)}{dt}\right\}-2\mathcal{L}\{ty(t)\}-\frac{x^2}{c^2}\mathcal{L}\{y(t)\}=0 \quad (4.16)$$

Eşitlik(4.16)'da ters dönüşüm alınırsa,

$$4t^2\frac{dy(t)}{dt}+(6t-\frac{x^2}{c^2})y(t)=0 \quad (4.17)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eşitlik(4.17)'deki diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olduğundan,

$$\frac{dy(t)}{y(t)}+\frac{6t-\frac{x^2}{c^2}}{4t^2}=0$$

biçiminde yazılıp integral alınırsa,

$$y(t)=At^{-3/2}e^{-x^2/4c^2t} \quad (4.18)$$

ya da,

$$ty(t)=At^{-1/2}e^{-x^2/4c^2t} \quad (4.19)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\mathcal{L}\{ty(t)\}=-\frac{dY(s)}{ds}=-\frac{d exp\{-\sqrt{s}x/c\}}{ds}=\frac{x}{2c\sqrt{s}}exp\{-\sqrt{s}x/c\} \quad (4.20)$$

ve t'in büyük değerleri için $\lim\limits_{x\to\infty} exp\{-x^2/4c^2t\}=1$ olduğundan eşitlik(4.19)'dan,

$$ty(t)=\frac{A}{\sqrt{t}} \quad (4.21)$$

ve, eşitlik(4.21)'den Laplace dönüşümü alınırsa, s'in küçük değerleri için $exp\{-\sqrt{s}x/c\}\sim 1$ olduğundan,

$$\mathcal{L}\{ty(t)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{A}{\sqrt{t}}\right\}$$

$$\frac{x}{2c\sqrt{s}}=A\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\Rightarrow A=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}$$

bulunur. Bulunan A, eşitlik(4.18)'de yerine yazılırsa,

$$y(t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}t^{-3/2}e^{-x^2/4c^2t} \quad (4.22)$$

bulunur. Bulunan ters dönüşüm, eşitlik(4.12)'de yerine yazılırsa,

$$u(x,t)=f(t)*\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}t^{-3/2}e^{-x^2/4c^2t} \quad (4.23)$$

convolution çarpım tanımı ile, eşitlik(4.20)'den,

$$u(x,t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t f(t-u)u^{-3/2}e^{-x^2/4c^2u}du \quad (4.24)$$

olur. Eşitlik(4.24)'de integrandaki $f(t-u)$ fonksiyonu birim basamak fonksiyonu olup,

$$f(t-u)=\begin{cases}1 & t>u\\ 0 & t<u\end{cases}$$

ile tanımlıdır (Kreyzsig, 2011; Nagle, Saff, Snider, 2012).

Dolayısıyla eşitlik (4.24)'den,

$$u(x,t)=\frac{x}{2c\sqrt{\pi}}\int_0^t u^{-3/2}e^{-x^2/4c^2u}du \quad (4.25)$$

yazabiliriz. Eşitlik(4.25)'deki integralde, $x^2/4c^2u=z^2,\ du=-x^2/2c^2z^3dz$ dönüşümü yapılırsa,

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2c\sqrt{t}}^{\infty}e^{-z^2}dz \quad (4.26)$$

bulunur. Eşitlik(4.26)'deki integral, elemanter bir fonksiyon olarak ifade edilemez. Fakat değerleri tablolar yardımıyla bulunabilir. Söz konusa integral kısım.1'de eşitlik(1.4) ile verilen olasılık integralininin tümleyenidir. Yani,

$$u(x,t) = 1 - \theta\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) \tag{4.27}$$

dır. Bu da, hata fonksiyonu cinsinden,

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} erfc\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right) \tag{4.28}$$

yazılıp, tablo yardımıyla dir (Kreyzsig, 2011) (sayfa A98, Ek.5, tabloA4), hata fonksiyonunun değerleri bulunur.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, her iki taraftan yalıtılmış, bir ucu sınırlı, diğer ucu sonsuza uzanan metal bir çubuk üzerinde başlangıç sıcaklığının 0 olduğu kabul edildiği başlangıç koşulu altında, ısı iletimi denkleminin çözümü Laplace dönüşümü kullanılarak yapılmış ve çözüm, olasılık integralinin tümleyeni biçiminde elde edilmiştir. Bu süreçte, elde ettiğimiz ve t'nin dağılımını veren eşitlik(4.22)'deki $y(t)$ fonksiyonun, 0'dan sonsuza kadar integralini alalım,

$$\frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-3/2} e^{-x^2/4c^2 t} dt \tag{5.1}$$

Eşitlik(5.1)'deki integralde, $x^2/4c^2t = u,\ dt = -x^2/4c^2u^2 du$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du \tag{5.2}$$

bulunur. Eşitlik(5.2)'deki integral başındaki katsayı hariç, gamma fonksiyonu olup değeri $\sqrt{\pi}$ dir. Dolayısıyla eşitlik(5.2)'deki integral 1'e eşit olur. O halde, eşitlik(4.22)'deki

$$y(t) = \frac{x}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-3/2} e^{-x^2/4c^2 t} dt$$

fonksiyonu bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

KAYNAKLAR

Alekseevna, T.Y.; Vladimirovna, N.S. & Rifgatovich, S.A. (2017). "Calculation of the Probability Integral Indicator of the Level of Air Pollution", Environmental Engineering 10th International Conference, 27–28 April 2017, (Cygas, D. & Vaiskunaite, R), Vilnius Gediminas Technical University, Vilnius, Lithuania.

Kreyzsig, E. (2011). Advanced Engineering Mathematics, John Wiley&Sons Inc., New York.

Lebedev, N.N. (1972). Special Functions and Their Applications, Dover Publications Inc., New York.

Li, S. & Cao, B. (2016). "Generalized Variational Principles for Heat Conduction Models Based on Laplace Transforms", International Journal of Heat and Mass Transfer, 103:1176–1180.

Meilanov, R.P.; Shabanova, M.R. & Akhmedov, E.N. (2015). "Some Peculiarities of the Solution of the Heat Conduction Equation in Fractional Calculus", Chaos, Solitons & Fractals, 75: 29–33.

Miller, I. & Miller, M. (1999). John E. Fround's Mathematical Statistics. Prentice Hall Inc., New Jersey.

Montgomery, D.C. & Runger, G.C. (2014). Applied Statistics and Probability For Engineers, John Wiley&Sons Inc., New York.

Nagle, R.K.; Saff, E.B. & Snider, A.D. (2012). Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems, Pearson Education, Inc., New York.

Stuart, A. & Ord, J.K. (1987). Advanced Theory of Statistics. Vol:1 Charles Griffin, London.